Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico-Químicas y Naturales de Granada

MODELOS ESTOCÁSTICOS DINÁMICOS

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

COMO ACADÉMICO NUMERARIO POR EL

ILMO. SR. D.

MARIANO J. VALDERRAMA BONNET

GRANADA, 2009

Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico-Químicas y Naturales de Granada

MODELOS ESTOCÁSTICOS DINÁMICOS

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

COMO ACADÉMICO NUMERARIO POR EL

ILMO. SR. D.

MARIANO J. VALDERRAMA BONNET

GRANADA, 2009

MODELOS
ESTOCÁSTICOS
DINÁMICOS

MODELOS ESTOCÁSTICOS DINÁMICOS

MARIANO J. VALDERRAMA BONNET

Siempre evito profetizar de antemano porque es mucho mejor hacerlo después de que han ocurrido los hechos

Winston Churchill

Excmo. Sr. Presidente de la Academia
Excmos. e Ilmos. Sres. Académicos
Queridos amigos y compañeros

El término academia proviene del héroe griego *Hekademos*, (o *Academo*) que fue quien reveló a los Dioscuros, Cástor y Pollux el lugar donde se encontraba prisionera su hermana Helena, que había sido raptada por Teseo. *Hekademos* tenía su sepultura en las afueras de Atenas y la tumba estaba rodeada de un bosque sagrado en el que Platón instaló su escuela de educación superior el año 387 a.C., siendo pues una mera coincidencia geográfica la identificación de academia como lugar del saber.

A partir del Renacimiento las academias se convirtieron en centros donde se debatían las cuestiones científicas de más alto nivel. Sus miembros eran los más reputados sabios en las correspondientes ramas del saber, mientras que las universidades se limitaban, casi de forma exclusiva, a la enseñanza superior.

A principios de siglo XX, y como continuadora de la Institución Libre de Enseñanza, se crea la *Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas* (J.A.E.), presidida por Santiago Ramón y Cajal, cuyo objeto era organizar la actividad investigadora española, equiparándola a la de países del entorno europeo. Tras la Guerra Civil, sobre la infraestructura de la J.A.E., se constituyó el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (C.S.I.C.), cuya misión era articular la investigación española en todos los niveles científicos y socio-humanísticos. No obstante, el máximo grado investigador reconocido en la legislación española, que es el título de doctor, siempre fue expedido por la Universidad.

A partir de mediados de los años sesenta, los departamentos universitarios comienzan a desarrollar una progresiva actividad investigadora que se intensifica a partir de la Ley de Reforma Universitaria de 1983 y de la posterior entrada en vigor de la evaluación investigadora, quedando por otra parte relegada a un segundo término la actividad docente universitaria.

Evidentemente, a lo largo del pasado siglo, el papel que desempeñan las academias ha ido variando y adaptándose al nuevo contexto y, como decía Josef Pieper, lo que confiere carácter académico a una institución es esencialmente esa manera especial de mirar que se dirige a la hondura de las formas y figuras del ser. Así, las Academias continúan siendo un referente del saber, cuyo objetivo básico es el cultivo, fomento y difusión del conocimiento.

La Academia de Ciencias Matemáticas, Fisico-Químicas y Naturales de Granada fue creada en 1976 gracias a las gestiones del Profesor D. Juan de Dios López González, Primer Presidente de la misma y actual Presidente honorario, el cual, por otra parte, contribuyó decisivamente a mi encauzamiento investigador tras finalizar en 1981 mi Licenciatura en Ciencias Matemáticas. Es, por tanto, un motivo de honor entrar ahora a formar parte de esta prestigiosa institución, a la que pertenecen y han pertenecido tantos grandes maestros admirados por mí desde mi época estudiantil.

Para mi discurso de entrada en la Academia el tema que he elegido versa sobre modelos estocásticos dinámicos, materia en la que de una forma u otra he centrado mi investigación desde hace más de veinticinco años y que ha marcado toda mi vida académica.

La Real Academia de la Lengua Española define modelo, en la acepción más adecuada a nuestro uso, como un *esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento*. A su vez, el término estocástico procede griego *stokhos*, que se refiere al lanzamiento de los dardos hacia el centro del blanco, por lo que se considera sinónimo de aleatoriedad.

Podemos deducir de la definición dada que un modelo es una representación simplificada de una realidad usada para predecir o comprobar su comportamiento frente a situaciones nuevas. Para elaborar un modelo es necesario plantear una serie de hipótesis de manera que lo que se quiere representar esté suficientemente plasmado en la idealización, aunque también se busca, normalmente, que sea lo bastante sencillo como para poder ser manipulado y estudiado.

Además de explicar la realidad, la construcción de modelos tiene un objetivo predictivo, es decir, en base al conocimiento actual de un fenómeno se pretende explicar su comportamiento en otra situación. De ahí la gran importancia que tiene el estudio de modelos dentro del ámbito científico pues, como dice un viejo proverbio chino, *adivinar es barato, pero adivinar erróneamente resulta caro.* El propio economista John Maynard Keynes decía que *utilizar las estadísticas para hacer predicciones prescindiendo de los refinamientos teóricos es actuar* *como los borrachos, que usan las farolas para apoyarse y no para iluminarse*.

En base al nivel de conocimiento sobre el resultado del fenómeno sobre el que se ha construido un modelo, éste puede clasificarse en *determinista*, donde el resultado se conoce *a priori* sin incertidumbre, o estocástico, donde no se tiene certeza sobre el mismo sino tan solo se conoce la probabilidad de diversas opciones. Así puede decirse que la principal diferencia entre un matemático puro y un probabilista es que el primero les afirmaría que la persona que ahora les dirige la palabra está viva, mientras el segundo les diría que la probabilidad de que eso ocurra es igual a la unidad o, incluso si se trata de un probabilista puro, les diría que es de 0,999.

Acotando el campo de mi disertación, ésta se centrará en los modelos aleatorios o estocásticos, pero, a su vez, cabe hacer una distinción entre el carácter temporal del fenómeno objeto de estudio. Cuando se trata de representar una situación concreta en un momento dado, el modelo en cuestión será de naturaleza estática, mientras que cuando se pretenda recoger su evolución a lo largo del tiempo, tendremos un modelo dinámico. La teoría de la Probabilidad engloba el estudio de los modelos estáticos, mientras que el análisis de los dinámicos corresponde a la teoría de Procesos Estocásticos.

El tema que voy a desarrollar estará divido en las cinco secciones siguientes:

1. Antecedentes y origen de los modelos matemáticos
2. La incorporación de la incertidumbre
3. De un concepto estático a uno dinámico de probabilidad
4. Modelización mediante procesos estocásticos de segundo orden
5. Análisis de datos funcionales

1. Antecedentes y origen de los modelos matemáticos

Desde el momento en que un homínido fue dotado de alma y adquirió raciocinio, comenzó a preguntarse el porqué de las cosas. De manera innata quiso aprender, no limitándose a contemplar pasivamente lo que ocurría a su alrededor, sino formando parte activa del medio en que se desenvolvía e interactuando con el mismo en búsqueda de su propio provecho. Aún, sin él mismo saberlo, comenzó a desarrollar el método científico, basado en la observación de los fenómenos para su posterior explicación y utilización. Así, comprendió que frotando piedras de pedernal saltaban chispas que podían prender yesca encendiendo un fuego, o que fabricando trampas en las rutas observadas de los animales podían capturarlos de forma más sencilla que con la persecución.

Pero además, el hombre primitivo aprendió a calcular distancias con su cuerpo o con sus pasos y se vio en la necesidad de establecer si su grupo era superior o no a otro rival, dando lugar así a los conceptos matemáticos básicos de medida y cuantificación. También la jerarquía entre los individuos integrantes de una tribu originó el establecimiento de un orden.

Posteriormente, el intercambio de productos o trueque que tuvo lugar a lo largo de la Edad de los Metales como herramienta comercial, motivó la necesidad de refinar la noción de recuento, que inicialmente se realizaba con los dedos, de donde procede la palabra *dígito*, desarrollando un cálculo aritmético primario. De hecho su nombre deriva del uso de guijarros o cálculos para realizar tales operaciones. Pero esto también dio lugar a otro concepto fundamental: el de correspondencia o función.

En cualquier caso, esta matemática prehistórica estaba basada en el empirismo sin tener aún una noción precisa de las relaciones causa-efecto inherentes a cada fenómeno. Ni siquiera en el antiguo Egipto, las Matemáticas pasaron de un nivel muy elemental, ligado básicamente al cálculo de áreas y predicción de la época de inundaciones, con objeto de retirar a tiempo enseres y establos, así como reconstruir las parcelas tras los sucesivos desbordamientos del río Nilo. Cabe, no obstante, resaltar que a partir de la observación de la estrella Sirio, fueron capaces de determinar la duración del año solar, que establecieron en 365 días y un cuarto.

Cabe resaltar a un personaje enigmático que los egipcios y posteriormente los griegos consideraban como el padre de todas las ciencias. Se trata de **Hermes Trismegistus**, que significa *Tres Veces Gran Hermes*, el cual fue un legendario legislador egipcio, sacerdote y filósofo, que vivió durante el reinado de Ninus, alrededor de 2270 años a.C. Hermes Trismegistus era el nombre que los griegos daban al dios egipcio Hermes Toth. Según la mitología egipcia, Toth era el gran consejero de Osiris que presidía las ciencias y se le atribuía un conjunto de obras que contenían prácticamente todo el saber del antiguo Egipto, concretamente más de treinta libros sobre teología y filosofía, y seis sobre medicina, además de cuarenta y dos libros sobre ciencias ocultas. De ahí procede el vocablo hermético. Pero el de mayor trascendencia fue su obra *Iatromathematica*, en la que se relacionaba la astronomía con la medicina.

La civilización griega, fue mucho más proclive a la abstracción, y al igual que hicieron los egipcios, empezaron a extraer conocimientos prácticos del estudio del cielo, pero más dirigidos hacia la creación de una práctica espacial, ya que su interés residía más en la orientación de sus barcos que en el clima. No obstante está práctica del conocimiento del cosmos, tampoco satisfacía su mentalidad abstracta, con lo que pronto se comenzaron a formular unos modelos matemáticos tendentes a dar explicaciones científicas a lo que los ojos podían vislumbrar en el firmamento.

Entre los filósofos griegos que abordaron esta cuestión cabe destacar en primer lugar a **Tales de Mileto** (624-546 a.C.), que propuso un modelo en el que una Tierra estática en forma de disco, flota y es rodeada por un océano de agua, principio de todas las cosas. Explicación simplista basada más en la especulación que en la contrastación que deja en el aire cuestiones relativas al sol, los planetas o las estrellas; pero que sin embargo supone un gran avance con respecto al cosmos homérico en donde los dioses en las alturas del Olimpo o los infiernos bajo la tierra marcaban la vida de los mortales.

Tras él destaca **Heráclito de Éfeso** (536-470 a.C.) que propugnó el movimiento constante del universo como condición de su equilibrio, siendo el fuego el principio generador de todo, de ahí la importancia del sol y de las estrellas, relacionando por primera vez su intensidad lumínica con su respectiva cercanía o lejanía de la Tierra.

De la misma manera que Heráclito, **Demócrito de Abderea** (460-370 a.C.) concibió un mundo dinámico, moviéndose por un espacio vacío. Las estrellas, los planetas, el sol y la tierra estarían todos formados por átomos, por otro lado aplicable a todas las cosas. Sin embargo tanto él como su maestro Leucipo, concebían una tierra plana.

Cabe reseñar igualmente la famosa obra *Decubitu ex Mathematica Scientia* de **Galeno de Pérgamo** (130-200 d.C.), citada por el catedrático de Matemáticas D. Diego de Torres Villarroel en su obra *Entierro del Juicio Final, y vivificación de la Astrología, herida con tres Llagas, en lo Natural, Moral, y Político; y curada con tres Parches*, que fue publicada en 1727. Galeno fue un gran médico griego cuya ciencia llegó a ser tan famosa que sus servicios fueron requeridos por los emperadores romanos Lucio Vero, Marco Aurelio y Cómodo, si bien sus conocimientos sobre Matemática y Astronomía eran muy limitados.

Paralelamente, en la América precolombina las diferentes civilizaciones desarrollaron modelos rudimentarios ligados a la astronomía, basados en la cuadriculación del cielo y en la disposición numérica piramidal con objeto de simplificar los cálculos.

No obstante, se considera punto de partida de lo que propiamente denominamos modelización matemática la obra *Liber Abaci*, escrita en 1202 por **Leonardo de Pisa** (conocido como *Fibonacci* a partir del siglo XVIII) donde propuso unas ecuaciones para estudiar el crecimiento de una población de conejos.

En 1551 Antonio Mizaldo escribió la obra *Planetologia* en la que cita la Gnomología como un método matemático griego de crecimiento de formas en el espacio aplicable al crecimiento de vegetales y objetos marinos, tales como las conchas. Posteriormente, Bartolomé de la Hera y de la Varra escribió en 1634 el trabajo *Repertorio del Mundo* en el que trasluce la influencia pitagórica griega al relacionar aspectos astronómicos con las reglas armónicas de la música y llegando, incluso, a dividir las enfermedades en periodos de siete días, comparando el septenario con una figura de dieciséis caras.

Esta idea del septenario es igualmente recogida en la obra de Jerónimo Fracastoro, publicada en 1808 con el título *Homocentrica*, en la cual el autor la aplica al ciclo lunar de veintiocho días, estableciendo un sistema de pronósticos que recomienda para la receta y uso de medicamentos.

Como podemos observar, el desarrollo de modelos causales ha estado asociado a lo largo de la mayor parte de la Historia a la Astronomía y su influencia en la Medicina como ciencia básica para el bienestar del ser humano.

2. La incorporación de la incertidumbre

La formulación clásica de los modelos matemáticos o *pseudomatemáticos* partía de una concepción determinista de la realidad, es decir, no se tenía en cuenta la variabilidad de resultados de un fenómeno de una vez a otra, a pesar de que sí se tenía la noción de la inexactitud del pronóstico. La modelización de la incertidumbre no tuvo lugar hasta mediados del siglo XVII, cuando se introdujo el concepto de probabilidad como medida de la aleatoriedad de un suceso incierto. Los pioneros fueron **Pierre Fermat** (1601-1665) y **Blaise Pascal** (1623-1662) y su desarrollo inicial estuvo vinculado a la resolución de problemas que planteaban los juegos de azar. En ello tuvo mucho que ver un jugador francés conocido como el Caballero de Mëré, que le planteaba numerosas cuestiones a Pascal y cuya solución queda recogida en la correspondencia mantenida entre él y Fermat que data de 1654. Esta concepción original de probabilidad, residía en la hipótesis de que los sucesos elementales eran equiprobables y el experimento en cuestión podía repetirse tantas veces como se quisiera, pero no era aplicable a situaciones más generales.

Así, pocos años después, **Jakob Bernouilli** (1654-1705), miembro de una familia que dio lugar a trece científicos notables, analizó la estabilidad del resultado obtenido en un juego de azar cuando el número de ensayos aumentaba considerablemente, introduciendo un concepto de probabilidad basado en la frecuencia relativa y dando origen a lo actualmente se conoce como *ley débil de los grandes números*. Su investigación se centró en experimentos con resultado dicotómico, que denominó éxito o fracaso, configurando así la primera distribución de probabilidad, denominada en su honor *ley de Bernouilli*. Los resultados de sus trabajos figuran en su obra magna

Ars Conjectandi, que fue póstumamente publicada en 1713.

Basándose en los resultados de Bernouilli, **Abraham de Moivre** (1667-1754) extendió el modelo dicotómico a experiencias repetidas en idénticas condiciones, dando lugar a la distribución *binomial*. Así mismo, sobre la base del trabajo del astrónomo inglés **Edmund Halley** (1656-1742) desarrolló unas tablas de vida que constituyen la base del actual análisis de supervivencia.

Frente a la concepción inicial de la probabilidad, **Thomas Bayes** (1701-1761) vio la necesidad de abordar la incertidumbre de un fenómeno de una manera más amplia. Así, él se planteó que si tras realizar el viaje de Londres a Bath en sesenta ocasiones no había sufrido ningún accidente mortal, la probabilidad frecuentista le garantizaba que ya nunca moriría en dicho trayecto. Así introdujo el concepto de probabilidad subjetiva y desarrolló un método para enriquecer la medida inicial de la incertidumbre mediante incorporación de nueva información a través de la verosimilitud, que se conoce actualmente como Teorema de Bayes. En 1763, dos años después de su muerte, se publica *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, en el que trataba el problema de las causas a través de los efectos observados, y donde se enuncia el teorema que lleva su nombre.

Un lugar destacado en la historia de la Probabilidad ocupa el matemático francés **Pierre-Simon de Laplace** (1749-1827) autor de la famosa obra *Théorie Analitique des Probabilités*. De origen humilde, acudió con cartas de recomendación al reputado matemático Jean Le Rond D'Alambert con objeto de que lo introdujera en el círculo científico de París, pero éste no lo tuvo inicialmente en consideración. Entonces Laplace escribió una disertación sobre los principios de la mecánica y se la envió a D'Alambert con la solicitud de que le concediera una audiencia. Estaba escrito en un lenguaje que un matemático podía entender y apreciar, por lo que D'Alambert quedó tan impresionado con el talento de Laplace, que lo mando llamar en seguida y le dijo: *No necesitáis más presentación que la recomendación de vuestro trabajo*. Así obtuvo el nombramiento de profesor de matemáticas en la Escuela Militar de París, y quedó asegurado su ingreso en el mundo de la ciencia.

El primer trabajo científico de Laplace fue la aplicación de las Matemáticas a la Mecánica Celeste. A Newton y otros astrónomos les fue imposible explicar las desviaciones de los planetas de sus órbitas, predichas matemáticamente. Así por ejemplo, se determinó que Júpiter y Saturno se adelantaban a veces, y otras se retrasaban con respecto a las posiciones que debían ocupar en sus órbitas. Laplace ideó una teoría, que confirmó con pruebas matemáticas, según la cual las variaciones eran normales y se corregían solas en el transcurso de largas etapas de tiempo. Igualmente, creó una curiosa fórmula para expresar la probabilidad de que el Sol saliera por el horizonte. Él decía que la probabilidad era de (d+1)/(d+2), donde d es el número de días que el sol ha salido en el pasado. Laplace decía que esta fórmula, conocida como la *regla de sucesión*, podía aplicarse en todos los casos donde no sabemos nada, o donde lo que conocíamos fue cambiado por lo que no.

Sin embargo, el punto de inflexión en el desarrollo del cálculo de probabilidades surgió al analizar los errores de observación, básicamente en astronomía, pues los científicos se dieron cuenta que aunque no podían predecirse errores individuales, su distribución en masa se ajustaba a ciertas leyes. Así sobre la base del ingente trabajo de Laplace, el matemático francés **Adrien Marie Legendre** (1752-1833) y el alemán **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855) introdujeron la distribución *Normal*. También ambos desarrollaron por separado el conocido *método de mínimos cuadrados* y en 1801 Gauss predijo con gran exactitud la órbita del asteroide Ceres, oculto tras el Sol, y que había sido observado sólo una cuadragésima parte de su trayectoria.

A lo largo del siglo XIX la Probabilidad y la Estadística tuvieron un gran desarrollo, llegando a unificarse en una sola disciplina. Su ámbito de aplicación se extendió a otras muchas áreas, cabiendo destacar la aportación de **Adolphe Quetelet** (1796-1874) que realizó una sistematización de la metodología estadística a la Sociología y especialmente al mundo de las encuestas, así como de la enfermera **Florence Nightingale** (1820-1910) pionera en la utilización de técnicas descriptivas gráficas en los estudios epidemiológicos.

Consideración especial merece **Francis Galton** (1822-1911), primo de Charles Darwin e interesado entre otras muchas cuestiones en problemas de herencia natural. Galton observó que los padres que presentaban características sobresalientes tendían a tener hijos con iguales características, y pensó que esto debía explicarse fundamentalmente en función de la naturaleza y no de la crianza. Para demostrarlo estudió a una serie de individuos de estatura superior a la media y observó que sus hijos, en promedio, seguían siendo personas altas, pero que la diferencia respecto a la media de su generación se había reducido por un factor que él estimó en 2/3 y así sucesivamente, lo que le llevó a enunciar la famosa *Ley de Regresión* según la cual los factores antropométricos tienden a regresar a la media de la raza, siendo la influencia de ésta más fuerte que la propia herencia. Su obra cumbre fue publicada en 1889 bajo el título *Natural Inheritance*, y aunque nunca ocupó cátedras universitarias, sino que desarrolló los trabajos por cuenta propia, le fue concedido el título de Sir a la edad de 87 años.

Con el objeto de someter a análisis los datos por él recogidos, contrató al matemático **Karl Pearson** (1857-1936), introductor de un procedimiento de análisis estadístico descriptivo denominado coeficiente de correlación. Así mismo estudió familias de distribuciones relacionadas con la Normal, entre las que destaca la ley *chi-cuadrado*, que aplicó al estudio de asociación entre caracteres cualitativos mediante tablas de contingencia y a la determinación de la bondad de ajuste. Fundó la revista *Biométrika* en 1902 y se le considera el creador de la Bioestadística.

Su hijo **Egon Pearson** (1895-1980) fue también un destacado estadístico y junto al polaco **Jerzy Neyman** (1894-1981) desarrollaron una metodología esencial para el desarrollo estadístico de gran parte del siglo XX: los contrastes de hipótesis basados en los errores de decisión asociados a la hipótesis de contraste. Concretamente, observaron que era imposible reducir al mínimo los dos tipos básicos de error: el tipo I, que se comete cuando se rechaza la hipótesis nula siendo ésta verdadera, y el tipo II, cuando se acepta la hipótesis nula siendo falsa. De tal forma plantearon hacer fija la probabilidad de cometer un error tipo I, llamada *nivel de significación*, y construir un estadístico que minimizara la probabilidad del error tipo II o, equivalentemente, que maximizara su probabilidad complementaria, denominada *potencia* del contraste.

Un destacado discípulo de Pearson, que también ocupa un lugar en el desarrollo de la Estadística, es **William Sealy Gosset** (1876-1937). Químico y matemático, trabajaba para la cervecera irlandesa *Arthur Guiness* en Dublín. Para los ensayos de calidad industriales disponía de muy pocas muestras por lo que las estimaciones basadas en la distribución Normal no eran fiables. Así introdujo una variante que asignaba mayor peso a las colas de la distribución, es decir, era más platicúrtica y la denominó ley *t*, a partir de la cual realizó inferencia sobre la media. Como la empresa Guiness prohibía a sus empleados firmar los trabajos con nombre propio, él utilizó el pseudónimo de *Student*, por el que actualmente es conocida dicha distribución de probabilidad.

Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) fue sucesor de Galton en la Cátedra de Eugenesia en la Universidad de Londres, si bien al comenzar la II Guerra Mundial, dicha cátedra fue disuelta y volvió a la Rothamsted Experimental Station, donde había trabajado previamente. Fisher fue un estadístico polifacético cuyas aportaciones más destacables son la introducción del principio de aleatoriedad en la recogida de muestras, el análisis de la varianza para diseños experimentales y desarrolló técnicas para obtener mayor cantidad de información útil a partir de muestras de datos más pequeñas.

Para finalizar esta reseña histórica sobre el desarrollo del concepto de probabilidad, mencionaremos a dos matemáticos rusos cuya aportación constituyó la base de la probabilidad moderna, El primero es **Andrei Andreyevich Markov** (1856-1922), discípulo de **Pafnuty Tchebycheff** (1821-1894), completó la prueba que permitía generalizar el teorema central del límite y que ya había avanzado el propio Tchebycheff. Pero su aportación más conocida es el estudio completo de un tipo de procesos estocásticos denominados en su honor *cadenas de Markov*, que son sucesiones de valores de una variable aleatoria en las que el valor de la variable en el futuro depende del valor de la variable en el presente, pero es independiente de la historia de dicha variable. El segundo es **Andrei Nikolaevich Kolmogoroff** (1903-1987) que estableció la axiomática en la que se sustenta la probabilidad moderna y demostró además la ley fuerte de los grandes números.

3. De un concepto estático a uno dinámico de probabilidad

Como se puso de manifiesto anteriormente, los Procesos Estocásticos constituyen la parte dinámica de la teoría de la Probabilidad, en cuanto que ésta se centra en el estudio de variables que representan un cierto fenómeno en un instante dado, mientras que los procesos estocásticos formulan leyes sobre situaciones aleatorias en movimiento.

Sin embargo, conceptualmente no está del todo definida la barrera entre ambas teorías. Si consideramos un fenómeno dinámico que evoluciona en los instantes t=1,2,...,N, el vector aleatorio obtenido $(X_1,X_2,...,X_N)$ puede considerarse por un lado como una variable aleatoria N-dimensional, y por otro lado como un proceso estocástico con espacio temporal finito. La existencia de correlaciones entre las variables X_i no influye en la clasificación del mismo en una u otra categoría.

Si el número de variables que componen el vector aleatorio fuese infinito numerable sí podríamos considerar a éste como un verdadero proceso estocástico, aunque, también existe una teoría consistente sobre variables aleatorias de dimensión infinita. Lo que sí parece claro es que si el conjunto de variables aleatorias consideradas fuese infinito no numerable, las herramientas del Cálculo de Probabilidades resultarían insuficientes para su tratamiento, y el problema encajaría dentro de la teoría de Procesos Estocásticos.

En cualquier caso, no es objetivo nuestro entrar en disquisiciones taxonómicas conceptuales, y consideramos que un mismo problema puede ser abordado desde distintas facetas. Nos limitaremos a considerar un proceso estocástico como una familia uniparamétrica de variables aleatorias $\{X(t,w),t\in T\}$ definidas todas ellas sobre un mismo espacio probabilístico $(\Omega,\mathcal{A},P)$, y que toman valores en un conjunto denominado espacio de estados. Generalmente, el parámetro t es el tiempo, aunque puede tener otros significados.

Si el espacio paramétrico es de dimensión mayor que uno el proceso se denomina campo aleatorio; y si las variables que constituyen el proceso son vectoriales, se dice que el proceso es vector-valuado.

La clasificación de los procesos estocásticos puede realizarse de diversas formas. Una primera forma es atendiendo al carácter del espacio de estados y del espacio paramétrico, pudiendo presentarse cuatro modalidades de procesos, según éstos sean discretos y/o continuos. Una segunda clasificación considera que los procesos pueden ser estacionarios o evolutivos, según se mantenga o no su distribución en el tiempo. Pero quizás, el procedimiento más completo es el propuesto por Karlin, que se basa en las relaciones de dependencia existentes entre las variables del proceso; así, se obtienen las siguientes clases de procesos:

1. Procesos con incrementos independientes: las variables de incremento temporal sobre intervalos de tiempo disjuntos son independientes.
2. Procesos de Markov: la distribución de cada variable del proceso depende solo del pasado inmediato.
3. Martingalas: la esperanza de una variable del proceso dado el pasado hasta un cierto instante es igual a la variable en dicho instante.
4. Procesos estacionarios: la distribución de cualquier vector de variables del proceso se mantiene si éstas se desplazan en el tiempo de forma constante.

Históricamente podemos considerar que el punto de partida en el estudio de procesos estocásticos se debe al botánico inglés Robert Brown, quien en 1827 observó que los granos de polen en suspensión acuosa mostraban un movimiento continuo y caótico en todas las direcciones. Este comportamiento era, a gran escala, lo que cabría esperar de una molécula si la teoría cinética fuese correcta. Dicho desplazamiento errático, denominado *movimiento Browniano*, inicialmente se atribuyó al hecho de que las partículas tenían vitalidad propia.

El primer estudio de este fenómeno desde un punto de vista matemático fue realizado en 1900 por **Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier** en su tesis doctoral *La Teoría de la Especulación* que, incluso, llegó a describir la dependencia de la posición de una partícula en cierto instante con respecto a la que ocupaba el instante anterior, conocida años más tarde como propiedad markoviana. Así mismo, en 1904, **Henri Poincaré** explicó que el movimiento caótico se debe al bombardeo continuo al que están sometidas las partículas en suspensión por parte de las moléculas del medio que las rodea, ya sea líquido o gaseoso

El análisis cuantitativo del movimiento Browniano fue desarrollado independientemente por **Albert Einstein** en 1905 y por **Marian Smolukhowski** en 1908, aunque su formulación rigurosa con fundamentación matemática se debe a **Norbert Wiener** (1923), quien lo definió como un proceso estocástico Gaussiano y centrado con incrementos independientes estacionarios. Un cuarto de siglo más tarde **Paul Lévy** completó su estudio matemático, por lo que en honor de ambos, es también conocido como proceso de Wiener o de Wiener-Lévy.

El físico francés **Juan Perrin** (1909) supuso que la energía cinética del movimiento Browniano de una partícula microscópica debe coincidir con la de una molécula, y preparó un experimento consistente en una suspensión de gomaguta y almáciga, obteniendo partículas esféricas de magnitud uniforme de 13×10^{-4} cm de diámetro mediante un proceso de centrifugación fraccionada. Así, denominando m y r, respectivamente, a la masa y radio de una partícula, d y d' las densidades de la partícula y del medio, y n_0 y n el número de partículas existentes a niveles separados por una distancia vertical h, se obtiene la ecuación:

$$\frac{RT}{N}\ln\frac{n_0}{n}=\frac{4}{3}\pi r^3 gh(d-d')$$

A partir de esta ecuación, Perrin y sus colaboradores lograron determinar por varios métodos el número de Avogadro N a partir del desplazamiento lineal medio μ de una partícula en movimiento Browniano:

$$N=\frac{RTt}{3\pi\eta r\mu^2}$$

siendo t el tiempo desde el origen y η la viscosidad del medio. Así mismo, encontraron que los desplazamientos reales se ajustaban a una distribución de Maxwell, y con objeto de obtener un valor medio preciso era necesario efectuar un gran número de medidas sucesivas. Las investigaciones de Perrin fueron reconocidas en 1926 con el Premio Nobel de Física.

A diferencia del modelo Browniano enunciado por Einstein y Smulokhowski, **Paul Langevin**, cuya tesis doctoral fue dirigida en 1902 por Pierre Curie, realizó un enfoque alternativo basado en principios de la mecánica Newtoniana. Así, denotando por *m* la masa de una partícula inmersa en un medio líquido y por *v(t)* su velocidad en el instante t, consideró que había dos fuerzas actuando sobre ella. Una es la fuerza de fricción ejercida por el medio que, según la ley de Stokes, viene dada por $-\beta v(t)$, donde la constante positiva β depende de la viscosidad del líquido y de la masa y diámetro de la partícula. La segunda fuerza *w(t)* es debida al efecto del bombardeo molecular, que produce cambios aleatorios en la aceleración instantánea de la partícula. Aplicando la segunda ley de la dinámica de Newton, se verifica que

$$m\Delta v(t) = -\beta v(t)\Delta t + \Delta w(t)$$

Suponiendo que el proceso *w(t)* verifica las hipótesis de Wiener, **George Eugene Uhlenbeck** y **Leonard Salomon Ornstein** (1930) modelizaron la velocidad de la partícula mediante la expresión:

$$m\frac{dv(t)}{dt}=-\beta v(t)+\frac{d\xi(t)}{dt}$$

denominada *ecuación de Langevin*. El principal problema de cara a su resolución es que el término que representa el error aleatorio es la derivada de un movimiento Browniano, la cual no existe. La solución de la ecuación de Langevin fue desarrollada por **Joseph Leo Doob** en 1942, dando un sentido preciso a dicha derivada, que denominó ruido blanco por analogía a la luz solar que, desde la perspectiva de su análisis en el dominio de frecuencias, tiene densidad espectral constante. La solución viene dada por:

$$v(t) = \frac{\sigma}{m}\left[v_0 e^{-\alpha t} + \xi(t) - \alpha e^{-\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha s}\xi(s)ds \right]$$

y se denomina *proceso de Ornstein-Uhlenbeck*.

Paralelamente al estudio del movimiento Browniano se ha ido desarrollando una teoría general de procesos estocásticos, abarcando tanto el estudio de propiedades estructurales básicas, como el tratamiento de clases concretas. Así, sobre fundamentos de la teoría de procesos (medibilidad, separabilidad, continuidad muestral, descomponibilidad infinita, etc.) cabe citar, entre otros, los trabajos pioneros de Kolmogorov (1930), Bochner (1933), Doob (1937) y Slutsky (1928, 1937). Las primeras aportaciones sobre ergodicidad de procesos se deben principalmente a Birkhoff (1931), Von Neumann (1932) y Hopf (1937); y sobre estacionariedad podemos reseñar los trabajos de Wiener (1930), Khintchine (1934) y Cramer (1940).

Actualmente, los procesos estocásticos se utilizan como modelo probabilístico de fenómenos de naturaleza muy diversa, siendo usual encontrar aplicaciones en campos tales como la Medicina, Economía, Psicología, etc., existiendo grupos de investigación en los que participan especialistas de diversas áreas.

Conviene, no obstante, dejar claro que no todos los sucesos son modelables en la misma medida. Así, para fenómenos climáticos, como evolución de las temperaturas anuales, o económicos, como el grado de ocupación hotelera, en los que hay ciertas componentes estacionales, pueden obtenerse modelos con una capacidad predictiva aceptable. En otros, especialmente en los de índole financiera tales como la evolución de la cotización de un título bursátil, resulta mucho más complicado realizar predicciones y su falta de exactitud no se debe a un mal planteamiento del modelo sino a la imposibilidad de capturar su aleatoriedad. Un caso extremo sería la sucesión anual de números de la lotería de Navidad que obtienen el premio *gordo*, el cual puede considerarse un proceso de ruido blanco.

Como decía James T. Adams, un astrónomo podrá conocer con gran exactitud dónde se hallará un cuerpo celeste a las once de la noche, pero no podrá hacer la misma predicción sobre el paradero de su hija a esa misma hora.

4. Modelización mediante procesos estocásticos de segundo orden

En las secciones anteriores hemos realizado un recorrido histórico de la evolución de los modelos matemáticos, desde los orígenes de la humanidad hasta el desarrollo de la teoría de procesos estocásticos. A continuación vamos a analizar cómo podemos construir un modelo estocástico que represente la evolución temporal de un cierto fenómeno natural. En general, salvo que se tenga un conocimiento teórico sobre dicho fenómeno, en el sentido de conocer su distribución probabilística, la única información disponible viene dada, en el mejor de los casos, por el conocimiento de algunos de sus momentos o por las observaciones muestrales, que en caso de evolucionar en el tiempo de forma continua, serán curvas.

Dentro de la modelización estocástica los procesos de segundo orden constituyen una herramienta básica, pues en su estudio no se imponen restricciones sobre las distribuciones finito-dimensionales del proceso, sino que se parte del conocimiento de sus momentos de primer y segundo orden que se suponen finitos. Esto quiere decir que a partir de las funciones media y covarianza se construye el modelo completo.

La metodología básica de modelización mediante procesos de segundo orden en tiempo continuo tiene su punto de partida en los trabajos de **Michel Loève** (1945) y **Kari Onni Uolevi Karhunen** (1947) que establecieron una representación de un proceso estocástico como una combinación lineal infinita de funciones ortogonales, análoga al desarrollo en serie de Fourier de una función en un intervalo acotado, pero con la diferencia de que en lugar de ser los coeficientes números reales y la base del desarrollo funciones sinusoidales, los coeficientes de este nuevo desarrollo son variables aleatorias incorreladas. La única hipótesis adicional que se le impone al proceso es la de su continuidad en media cuadrática.

La serie obtenida, denominada en la literatura estadística *desarrollo de Karhunen-Loève,* converge uniformemente en media cuadrática en cada instante y los coeficientes de cada sumando son funciones L_2-ortogonales en el intervalo paramétrico del proceso, y se obtienen como las soluciones de una ecuación integral de Fredholm homogénea de segunda especie cuyo núcleo es precisamente la función de covarianza del proceso. Es decir, cada valor propio, que representa la varianza de cada variable aleatoria de la serie, genera un espacio de funciones propias de dimensión igual a su multiplicidad y en el caso más usual de ser simples, la base asociada consta de una única función propia.

Aunque dicho desarrollo es infinito, podemos truncarlo en un cierto término en función del grado de aproximación que queramos, en el sentido de explicar una proporción de la variabilidad total del proceso tan próxima a la unidad como se desee. Esto es posible dado que los valores propios constituyen una sucesión numérica decreciente y no negativa. Así, por ejemplo, la ecuación característica del movimiento Browniano en el intervalo [0,1], cuya función de covarianza viene dada en el caso de desplazamiento medio cuadrático unitario por $C(s,t)=min\{s,t\}$, al tratarse de un proceso con incrementos independientes y estacionarios, tiene infinitas soluciones simples que vienen dadas por $\lambda_k=(k-½)^2\pi^2$, k=1,2,…, siendo las funciones propias asociadas sinusoides del tipo $\varphi_k(t)=2^{½}sen(\lambda_k t)$. Considerando sólo los cinco primeros términos del desarrollo de Karhunen-Loève, la serie truncada explica más del 90% de la variabilidad total del movimiento Browniano en el intervalo considerado.

Como nota anecdótica cabe reseñar que, mientras que M. Loève ha sido un reputado probabilista autor de numerosos trabajos, entre otros el célebre libro *Teoría de la Probabilidad*, adoptado como texto en numerosas Facultades de Matemáticas, el finlandés K. Karhunen solo publicó tres artículos dignos de mención, destacando entre ellos su tesis doctoral *Über Lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, realizada bajo la dirección del Prof. Rolf Nevanlinna, y publicada en español en la revista *Trabajos de Estadística*, tras una conferencia que impartió en Madrid en 1950 invitado por el C.S.I.C. Posteriormente, Karhunen abandonó la Universidad y la investigación para entrar en el mundo actuarial, de gran implantación en los países escandinavos, llegando a ser director general y luego presidente de una importante compañía aseguradora. En 1980, en reconocimiento a su breve pero importante aportación científica, fue nombrado *Honorary Professor*.

La utilidad del desarrollo de Karhunen-Loève en la modelización práctica de fenómenos ha sido inmensa, especialmente en el campo de la estimación y detección de señales, siendo usual en Ingeniería añadir la hipótesis de ser Gaussiano el proceso, con lo que las variables del desarrollo son también normales e independientes y éste converge uniformemente casi seguramente en cada instante. Pero también ha sido ampliamente utilizado en ciencias medioambientales, especialmente en el estudio de fenómenos climáticos y más recientemente en Economía.

La principal limitación de esta metodología radica en que la ecuación integral asociada al desarrollo no es siempre resoluble por métodos directos, siendo necesario recurrir a aproximaciones numéricas. Es precisamente este campo dónde yo realicé mi tesis doctoral, defendida en 1984 bajo la dirección del Profesor D. Ramón Gutiérrez Jáimez, el cual me propuso, como punto de partida, tratar de abordar este problema mediante métodos numéricos de resolución de ecuaciones integrales tipo Volterra. Inicialmente analizamos diferentes algoritmos, basados en los métodos de colocación, del trapecio y de proyección ortogonal. Este último, aunque era desde un punto de vista analítico y computacional, el más eficaz, presentaba el problema de seleccionar una base ortogonal apropiada en el subespacio lineal sobre el que se proyectaba el proceso estocástico de clase L_2.

Dado que a principios de los años ochenta no se disponía de los medios informáticos actuales, tanto en hardware como en software, los cálculos había que hacerlos manualmente ocupando varias páginas de la tesis, y se eligieron como funciones básicas polinomios de Legendre y funciones trigonométricas, siendo la dimensión igual a dos.

Así mismo, abordamos en dicho trabajo la caracterización de la propiedad Gaussiana en procesos de segundo orden a partir de la imposición de la independencia de las variables de su desarrollo. El teorema de caracterización para procesos estacionarios en sentido débil fue publicado por Gutiérrez y Valderrama (1989, 1992) y para vectores aleatorios en general por Valderrama y Aguilera (1997).

A lo largo de esta primera fase de mi investigación el esquema teórico de trabajo consistía en un proceso estocástico de segundo orden con una estructura de covarianza conocida, en la que la ecuación integral asociada fuera resoluble de forma directa o, en caso contrario, mediante los antedichos métodos aproximados. De hecho, en numerosos problemas relacionados con la teoría de la información aparecen procesos con incrementos independientes estacionarios, entre ellos, el proceso de Poisson homogéneo o el propio proceso de Wiener, y otros derivados de él tales como el proceso de Ornstein-Ühlenbeck, el puente Browniano o los procesos de banda estrecha. En todos los casos, a partir de la expresión de las funciones propias asociadas al proceso se resolvieron problemas tales como el de obtener la expresión de la función impulso de respuesta de un filtro lineal óptimo, así como la forma explícita de la función de probabilidad de ciertos procesos de Poisson doblemente estocásticos.

También, en este periodo, comenzamos el estudio de representaciones en campos aleatorios, homogéneos e isotrópicos, y su aplicación a la modelización de problemas geofísicos. Igualmente el desarrollo de Karhunen-Loève se aplicó al problema de reducción de dimensión en análisis estocástico, siendo de especial interés la formulación de modelos de espacio de estados de dimensión mínima, que cumplían propiedades óptimas de observabilidad y controlabilidad, y la consiguiente predicción mediante filtrado de Kalman.

5. Análisis de datos funcionales

La hipótesis de un proceso con función de covarianza conocida es solo válida en situaciones muy concretas y en la mayoría de los casos la única información disponible sobre el mismo es la proporcionada por las trayectorias muestrales mediante su observación. Así, el problema teórico de representación y aproximación podía enfocarse como una extensión de los métodos estadísticos de análisis de datos multivariante al caso continuo.

Los primeros trabajos sobre este tópico datan de los años setenta, siendo la escuela francesa precursora en su estudio, cabiendo destacar de manera especial los trabajos de Jean Claude Deville (1974) continuados posteriormente por Gilbert Saporta (1981) y Philippe Besse (1991). De forma paralela Jim Ramsey (1982), profesor de Psicometría en la McGill University de Montreal y Bernard Silverman (1982), a la sazón profesor de Estadística en la Universidad de Bath, aunque posteriormente en la de Bristol y actualmente en el St Peter's College de Oxford, dieron cuerpo de doctrina a esta teoría que se materializó en su obra cumbre *Functional Data Analysis*, cuya primera edición data de 1997, y que tuvo extensión en el manual de orientación práctica *Applied Functional Data Analysis: Methods and Case Studies* de 2002, así como en la segunda edición de la obra base en 2005.

El *análisis de datos funcionales* (FDA) supone pues un paso más en el proceso de aproximación de la teoría estocástica al mundo real. Es a este campo donde a principios de los años noventa decidí reorientar mi línea de investigación, dirigiendo los primeros pasos al desarrollo de métodos aproximados para la obtención de estimadores de los valores propios del desarrollo de Karhunen-Loève, que son las varianzas de las correspondientes componentes principales. Como mencionamos anteriormente, el marco teórico de trabajo era un espacio funcional L_2 al que pertenecen las trayectorias del proceso y su proyección sobre un subespacio lineal. Dado el desarrollo computacional habido en los diez transcurridos desde que realicé mi tesis doctoral, ahora ya fue posible considerar bases de dimensión superior a dos e incluir como funciones básicas, además de las funciones trigonométricas y polinomios ortogonales, funciones indicadoras en el caso de proceso con trayectorias escalonadas, tales como los puntuales o splines cúbicos para procesos con trayectorias regulares.

Por otra parte, aunque el proceso objeto de estudio evolucione a lo largo del tiempo en forma continua, como corresponde a nuestro planteamiento, en la práctica resulta casi imposible obtener registros continuos de sus funciones muestrales, es decir, no se dispone de un conjunto de curvas conocidas, sino de sus valores en una serie de instantes o nodos de observación. Así, para trasladar el problema real al ambiente funcional en el que se desarrolla nuestra teoría, fue preciso interpolar adecuadamente las trayectorias. Los resultados fueron publicados en 1995.

Una vez puesta a punto la metodología básica abordamos la construcción de modelos predictivos en términos de componentes principales funcionales. Este problema se planteó en dos fases. La primera consistía en predecir una variable futura del proceso en términos de su evolución en un intervalo pasado, mientras que la segunda extendía la predicción a lo largo de un intervalo futuro. Para ello se estableció un procedimiento de cruce entre componentes principales funcionales del pasado y futuro, analizando las que presentaban una correlación lineal más alta entre si y seleccionando entre ellas las que suponían un mayor aporte explicativo al modelo. Ello originó los denominados modelos PCP (Predicción en Componentes Principales, o bien *Principal Component Prediction*) que fueron publicados por vez primera en 1997 y que son referidos con esta denominación en la literatura estadística.

La aplicación de esta metodología a series temporales funcionó de forma adecuada, mejorando las predicciones obtenidas mediante los métodos usuales de alisado exponencial o de Box-Jenkins. Sin embargo, el principal problema conceptual que presentaba nuestro esquema consistía en que al cortar la serie completa en trayectorias muestrales éstas no eran propiamente independientes entre si, ya que el inicio de cada una de ellas era consecutivo al fin de la anterior. Este problema fue razonablemente resuelto introduciendo ponderaciones en el estimador de la covarianza del proceso, de forma que las observaciones más recientes tuvieran mayor peso en la estimación que las más antiguas. Básicamente se utilizaron dos tipos de ponderación: la lineal con pendiente positiva y la exponencial.

Como planteamiento alternativo se propuso adaptar un modelo ARIMA a las componentes principales más explicativas en la representación del proceso y, para comprobar su eficacia, se aplicó al fenómeno climático que se origina en el Océano Pacífico conocido como *El Niño*. Los resultados se publicaron en 2002 demostrando la superioridad del método propuesto sobre otros tradicionales. Así mismo, se han analizado los modelos de regresión dinámica desde una perspectiva funcional.

Los métodos que hemos desarrollado se han aplicado con éxito a dos campos con un interesante potencial aplicativo: el de los procesos de recuento con intensidad aleatoria y el de los modelos de espacio de estado no estacionarios en tiempo continuo.

Dentro del amplio espectro del FDA, nuestra línea de investigación se ha centrado básicamente en el análisis funcional en componentes principales, y en la actualidad estamos trabajando en regresión logística funcional y en modelos CARMA. Pero existen otros muchos tales como el de profundidad con datos funcionales y problemas de clasificación asociados, los modelos lineales funcionales, regresión funcional, etc.

Como decía anteriormente, en muchas disciplinas científicas se ha podido progresar gracias al avance computacional, el cual ha permitido implementar cálculos muy laboriosos y comprobar la bondad de los métodos mediante estudios de simulación. Nuestra área de trabajo no ha quedado exenta de ello, sino que por el contrario, al tratarse de una extensión del análisis de datos multivariante, los métodos computacionales han ocupado un lugar prioritario.

Para finalizar quiero hacer una reflexión genérica sobre el concepto de investigación. Aprendí del Prof. Gutiérrez Jáimez, que aunque no se vea de forma inmediata el resultado de nuestro trabajo, lo importante es mantener engrasada la máquina de la investigación para que la suma de nuestros pequeños esfuerzos redunde en un final que en un momento determinado pueda ser aprovechado por alguien. De hecho, la integral de *dx* en el intervalo [0,1] no es cero, sino uno.

En mi caso, la integral de la investigación ha dado un resultado positivo gracias, en primer lugar, al excelente maestro que tuve, y posteriormente a mis discípulos, actuales compañeros, a los que tuve el honor de dirigir. Entre ellos quiero destacar a los que conforman mi grupo de investigación, los profesores de la Universidad de Granada Ana Mª Aguilera del Pino, Francisco A. Ocaña Lara, Francisco Jiménez Gómez, Paula Rodríguez Bouzas, Manuel Escabias Machuca y Francisco M. Ocaña Peinado, así como la profesora Mónica Ortega Moreno, de la Universidad de Huelva. Igualmente quiero destacar a mis antiguos colaboradores, que actualmente desarrollan su propia investigación, los profesores Juan Carlos Ruiz Molina y Nuria Ruiz Fuentes, de la Universidad de Jaén, Mª Dolores Ruiz Medina y María José del Moral Ávila, de la Universidad de Granada y Juan Luis González Caballero, de la Universidad de Cádiz.

Sin lugar a dudas, mi familia ha sido decisiva, no solo en mi vida personal, sino también académica. De hecho, el título de este discurso contiene los términos que mejor reflejan su influencia: Modelos estocásticos dinámicos. De mi esposa Pilar, principal motor de mi existencia, he aprendido a tener un pensamiento dinámico capaz de afrontar problemas con decisión y autocrítica; mis cinco hijos me han obligado a coexistir con la aleatoriedad, asumiendo plenamente la frase de Churchill que encabeza este discurso; finalmente, mis primeros maestros, que fueron mis padres, me enseñaron que la honradez y el trabajo reflejan el modelo de persona que hay que ser en la vida.

Yo, si soy alguien dentro de la Universidad y de la sociedad, se lo debo a ellos.

He dicho

Bibliografía

Aguilera A.M., Gutiérrez R., Ocaña F.A. y Valderrama M.J. (1995). Computational approaches to estimation in the principal component analysis of a stochastic process. *Appl. Stoch. Models Data Anal.*, **11** (4), 279-299.

Aguilera A.M., Ocaña F.A. y Valderrama M.J. (1997). *An approximated Principal Component Prediction model for continuous time stochastic processes*. *Appl. Stoch. Models Data Anal.*, **13** (1), 61-72.

Besse Ph. (1991). Approximation spline de l'analyse en composantes principales d'une variable aléatoire Hilbertienne. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **12**, 329-346.

Birkhoff G.D. (1931). Proof of the ergodic theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,* **17**, 656-660.

Brown R. (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the polen of plants, and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine N.S.,* **4**, 161-173.

Bochner S. (1933). Integration von funktionen, deren Werte die elemente eines vektorraumes sind. *Fund. Math.,* **20**.

Crámer H. (1940). On the theory of stationary random processes. *Ann. Math.,* **41**, 215-230.

Deville J.C. (1974). Méthodes statistiques et numériques de l'analyse harmonique. *Annales de l'INSEE,* **15**, 3-101.

Doob J.L. (1937). Stochastic processes depending on a continuous parameter. *Trans. Am. Math. Soc.*, **42**, 107-140.

Doob J.L. (1942). The Brownian movement and stochastic equations. *Ann. Math.,* **43**, 351-369.

Einstein A. (1906). Zur theorie der Brownschen Bewegung. *Ann. Phys.*, **IV-19**, 371-381.

Fisher R.A. y Tippett L.H.C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest number of a sample. *Cambridge Philos. Soc.,* **24** (2), 180-190.

Gutiérrez R. y Valderrama M.J. (1989). On the Gaussian characterization of certain second order processes with specified covariance**.** *I.E.E.E. Transactions on Information Theory*, **35** (1), 210-212.

Gutiérrez R. y Valderrama M.J. (1992). A note about the Gaussian property of the Brownian bridge. *Appl. Stoch. Models Data Anal.*, **8** (1), 1-5.

Hopf E. (1937). Ergodentheorie. *Erg. Math.,* **5**, nº 2.

Karhunen K. (1952). Métodos lineales en el Cálculo de Probabilidades. *Trabajos de Estadística*, **3** (1-2), 59-137.

Karlin S. (1957). The classification of birth and death processes. *Trans. Am. Math. Soc.*, **86**, 366-400.

Khintchine A.Y. (1934). Korrelationstheorie der stationären stochastischen prozesse. *Math. Ann.*, **109**, 415-458.

Kolmogorov A.N. (1930). Untersuchungen über den Integralbegriff. *Math. Ann.,* **103**. 654-696.

Loève M. (1945). Fonction aléatoires du second ordre. *C.R. Acad. Sci.*, Ser. I, **220**, 469.

Lévy P. (1934). Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **3**, 337-366.

Lévy P. (1949). *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*. Gauthier-Villars, Paris.

Markov A. (1907). *Extension of the Limits Theorems of Probability Theory to a Sum of Variables Connected in a Chain*. The Notes of the Imperial Academy of Sciences of St. Petersburg. VIII Series: Physio-Mathematical College, vol. XXII, No. 9.

Otero J.M. (1994). *La Predicción en Economía: Perspectiva Histórica y Tendencias Actuales*. Universidad de Málaga

Padra C. (2004). Algunos aspectos de la prehistoria de la Matemática, desde la Patagonia. difundiendo saberes. *Revista de Divulgación Científica del Centro Regional Universitario Bariloche*, Universidad Nacional del COMAHUE, **1**, 36-41.

Perrin J. (1909). Brownian movement and molecular reality. *Annales de Chimie et de Physique*, 8[me] series.

Ramsay J.O. (1982). When the data are functions. *Psychometrika*, **47**, 379-396.

Ramsay J.O. y Silverman B.W. (2005). *Applied Functional Data Analysis: Methods and Case Studies*. Springer-Verlag, New York.

Ramsay J.O. y Silverman B.W. (2005). *Functional Data Analysis*. Springer-Verlag, New York.

Saporta G. (1981). *Méthodes exploratoires d'analyse de données temporelles*. Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationelle, nº 37-38

Silverman B.W. (1982). On the estimation of a probability density function by the maximum penalized likehood method. *Ann. Stat.*, **10**, 795-810,

Slutsky E. (1928). Sur les fonctions éventuelles continues, intégrables et dérivables dans le sens stochastique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **187**, 878-880.

Slutsky E. (1937). Alcuni proposizioni sulla theoria degli funzioni aleatorie. *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **8**, 183-199.

Uhlenbeck G.E. y Ornstein L.S. (1930). On the theory of brownian motion. *Phys. Rev.*, **36**, 823-841.

Valderrama M.J. (1991). Stochastic signal analysis: numerical representation and applications to System Theory. *Appl. Stoch. Models Data Anal.*, **7** (1), 93-106.

Valderrama M.J. y Aguilera A.M. (1997). A normality criterion for random vectors based on independence. Statistics and Probability Letters, **33**, 159-165.

Valderrama M.J., Aguilera A.M. y Ocaña F.A. (2000). *Predicción Dinámica mediante Análisis de Datos Funcionales.* La Muralla, Madrid.

Valderrama M.J., Aguilera A.M. y Ocaña F.A. (2002). *Forecasting PC-ARIMA models for functional data*. Proceedings in Computational Statistics 2002 (W. Härdle & B. Rönz, eds.), Physica-Verlag, 25-36.

Valderrama M.J. (2007). An overview to modelling functional data. *Comp. Stat.*, **22** (3), 331-334.

Valderrama M.J., Ocaña-Lara, F.A., Aguilera A.M. y Ocaña-Peinado F.M. (2009). Forecasting pollen concentration by a two-step functional model. *Biometrics*, en prensa.

Von Neumann J. (1932). Proof of the quasi-ergodic hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,* **18**, 70-82.

Wang M.C. y Uhlenbeck G.E. (1945). On the theory of Brownian motion II. *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 323-342.

Weibull W. (1939). *A Statistical Theory of the Strength of Materials*. Ing. Vetenskaps Akad. Handl., 151, Stockholm.

Wiener N. (1923). Differential space. *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.,* **2**, 131-174.

Wiener N. (1930). Generalized harmonic analysis. *Acta Math.,* **55**, 117-258.

CONTESTACIÓN DEL EXCMO. SR. D. RAMÓN GUTIÉRREZ JAÍMEZ

Excelentísimo Sr. Presidente,
Excelentísimos e Ilustrísimos Sres. Académicos,
Sras. y Sres.:

Es para mí un honor y un placer contestar al discurso de ingreso como Académico de Número del Profesor Doctor Mariano J. Valderrama Bonnet. Agradezco vivamente a esta Academia el que me haya designado para ello.

Sólo con una sólida madurez científica y cultural en un campo del conocimiento es posible dibujar tan acertada síntesis de una línea de investigación de desarrollo tan amplio en el tiempo, en resultados y en aplicaciones en numerosos e importantes campos científicos.

En efecto, en su discurso sobre *Modelos estocásticos dinámicos*, Mariano Valderrama nos presenta una brillante y magistral síntesis del desarrollo de la modelización estocástica en los últimos cien años, mostrándose las principales ideas y métodos que han marcado la evolución y progreso de uno de los campos de mayor interés teórico y aplicado de las teorías probabilísticas, resaltándose los hitos más significativos de su desarrollo en relación con importantes problemas, de carácter estocástico-dinámico, pertenecientes a campos de la Física teórica, la Economía y Finanzas estocásticas, o el modelado en Procesos de Crecimiento y Teoría de Poblaciones, entre otros muchos. Y a la vez, mostrando el origen de importantes teorías estocásticas, hoy sustanciales en la Probabilidad, como el Cálculo Estocástico o la Teoría de Procesos y Campos Aleatorios.

En particular en este contexto se nos presenta una de las líneas de mayor desarrollo actual, en la que se centra la labor investigadora del profesor Valderrama en las últimas décadas, cual es la modelización estocástica con datos funcionales, línea en la que se produce, en particular, una muy productiva síntesis entre importantes técnicas de reducción de la dimensión del Análisis Multivariante y la consideración de datos funcionales provenientes de un contexto aleatorio-dinámico.

Es de destacar que una herramienta probabilística básica, verdadero hilo conductor en el desarrollo de esta línea de investigación, es el desarrollo de Karhunen-Loève de procesos estocásticos de segundo orden, tema que le propuse al Prof. Valderrama para su tesis doctoral y que desarrolló bajo mi dirección en los años 1981-1984 de manera excelente. Fue la primera tesis doctoral realizada en España en esta línea y son numerosos los trabajos posteriores publicados por M. Valderrama en prestigiosas revistas internacionales, que utilizan las aportaciones contenidas en la mencionada tesis.

Un numeroso grupo de investigadores han sido formados y son dirigidos por el profesor Valderrama en esta línea en los últimos años, grupo que constituye una referencia internacional en el tema y que desarrolla una amplia actividad investigadora a nivel de publicaciones, proyectos, editor de revistas JCR, dirección de Tesis y otros. En este sentido cabe decir, en síntesis, que M. Valderrama fue pionero en la investigación sobre Datos Funcionales en España, línea a la que posteriormente se han sumado otros importantes grupos de investigación nacionales, y que ha sabido siempre ejercer con gran generosidad de miras y en el mejor sentido de la palabra, como líder investigador, profesional y personalmente hablando.

En cuanto al curriculum profesional del Prof. Valderrama, bien conocido por esta Academia, cabe decir sin duda alguna que puede catalogarse como amplio, completo y excelente, acreditándole como un sólido y prestigioso valor en el panorama docente e investigador, a nivel internacional, en el campo de la Probabilidad y la Estadística.

Este currículo, excelente en todos los sentidos, es el fruto de una incansable y continua labor realizada con gran seriedad profesional, con un alto grado de compromiso ético y con una dedicación total. Al margen de su amplísimo número de trabajos, publicados en las más prestigiosas revistas JCR del área, de tesis y proyectos dirigidos, etc. es de destacar su capacidad de liderazgo, ya señalada antes, que le han conducido a constituirse en maestro, en el mejor sentido universitario del término, de un numeroso grupo de profesores e investigadores de la Universidad de Granada y de otras.

Una característica general muy destacable y valiosa de su currículum, fruto sin duda de su talante personal y profesional, es el hecho de estar permanentemente en contacto y participar activamente en la conexión entre la investigación y docencia propias del área de Estadística y Probabilidad y otras áreas y campos científicos de gran interés y desarrollo actual, en los que ambas materias constituyen poderosas herramientas de modelización y análisis. Muestra palpable de ello es su clara vocación de desarrollar la aplicabilidad de sus investigaciones teóricas a situaciones reales y problemas abiertos de campos tan variados como la Economía estocástica, las Ciencias Medioambientales, o las Ciencias Biosanitarias, entre otros. Otra muestra significativa de esta actitud, es la realización de estudios de Economía culminados en la realización del Doctorado en Ciencias Económicas (Granada, 1997), cuando ya era catedrático de Universidad.

Completando su perfil profesional, no quiero dejar pasar esta ocasión, sin destacar sus cualidades humanas que impregnan su vida académica y personal. De sólida formación cultural y humana, su ética y firmes convicciones, le hacen acreedor de la máxima consideración entre todos los que le rodeamos.

En nombre de la Academia le doy la más sincera bienvenida, le deseo los mayores éxitos en todos los órdenes de la vida y le pido expresamente su colaboración para que, en el futuro, la Academia y especialmente su Sección de Matemáticas, desarrollen cada vez más y mejor sus objetivos.

Muchas gracias.